Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2012. március 10.

VII. OSZTÁLY

1. feladat. Adottak az $a_1, a_2, \cdots, a_{2012}$ páratlan természetes számok. Igazold, hogy az $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2012}^2 - 1}$ szám irracionális!

Gazeta Matematică

2. feladat. Az a, b és c szigorúan pozitív valós számok teljesítik az $a^2 + ab + ac - bc = 0$ egyenlőséget.

a) Igazold, hogy ha az a, b és c számok közül kettő egyenlő egymással, akkor a három szám közül legalább egy irracionális!

b) Igazold, hogy végtelen sok nullától különböző természetes számokból álló (m, n, p) számhármas létezik, amelyekre $m^2 + mn + mp - np = 0$

3. feladat. Adottak az ABC hegyesszögű háromszög oldalain az $M, N \in (BC)$, $Q \in (AB)$ és $P \in (AC)$ pontok úgy, hogy $MNPQ$ téglalap. Bizonyítsd be, hogy ha az $MNPQ$ téglalap középpontja egybeesik az ABC háromszög súlypontjával, akkor $AB = AC = 3AP$.

4. feladat. Adott az E pont az $ABCD$ négyzet AB oldalán. A DE egyenes és a BC egyenes metszéspontja F, a CE egyenes és az AF egyenes metszéspontja G. Bizonyítsd be, hogy a BG és DF egyenesek merőlegesek egymásra!

Munkaidő 4 óra.
Minden feladatra 7 pont szerezhető.